

ALGEBRA LINIOWA 2 (INF, TIN), MAP1152

Zadania do samodzielnych ćwiczeń
Wydział Elektroniki, I rok, kierunek informatyka

ZBIGNIEW OLSZAK

PODOBIENSTWO MACIERZY, DIAGONALIZACJA MACIERZY

1. Znaleźć macierze przekształcenia liniowego

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (3x - 2y, 2x + 3y)$$

w podanych bazach przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^2

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ = baza standardowa; (b) $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} = \{(3, 2), (-2, 3)\}$; (c) $\mathcal{B}''_{\mathbb{R}^2} = \{(-1, 2), (-2, 2)\}$.

2. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y, z, t) = (-2x + y - 2z + t, x - 2y + z - 2t)$$

w podanych bazach przestrzeni \mathbb{R}^4 i \mathbb{R}^2

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$ = baza standardowa, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ = baza standardowa;

(b) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(0, 1, 1, -1), (1, 0, -1, 0), (-1, -1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(2, 1), (-1, 0)\}$;

3. O przekształceniu liniowym $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ wiemy, że

$$T(1, 1) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad T(2, -1) = (5, 4, 3, 2, 1).$$

Jak wyglądają $T(1, 0)$, $T(0, 1)$ i ogólnie $T(x, y)$ dla dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

4. Przekształcenie liniowe $T: V \rightarrow V$ ma w bazie $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierze A' , A'' przekształcenia T w podanych bazach

(a) $\mathcal{B}'_V = \{v'_1 = 2v_1, v'_2 = v_2 + v_3, v'_3 = -v_1 + 2v_2 - v_3\}$;

(b) $\mathcal{B}''_V = \{v''_1 = -v_1 + v_2 + v_3, v''_2 = v_1 - v_2 + v_3, v''_3 = v_1 + v_2 - v_3\}$

5. Pokazać, że poniższe macierze A i A' są podobne

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Wykazać, że jeśli macierze A i B są podobne, to:

(a) dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ macierze $A + \lambda E$ i $B + \lambda E$ też są podobne (E oznacza macierzą jednostkową);

(b) dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ macierze A^k i B^k też są podobne.

7. Skorzystać z poprzedniego zadania i pokazać, że poniższe macierze A i B nie są podobne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Sprawdzić, dla jakich wartości parametrów a i b macierz A jest diagonalizowalna

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

9. Dla podanej macierzy A skonstruować macierz podobną A' , która ma postać diagonalną (wykonać proces diagonalizacji macierzy):

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad (c) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

W każdym przypadku wskazać macierz P realizującą podobieństwo, tzn. taką, że $A' = P^{-1}AP$.

PRZESTRZENIE EUKLIDESOWE

10. Sprawdzić, czy funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni \mathbb{R}^n , jeśli

- (a) $n = 2, \langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1,$
- (b) $n = 2, \langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2,$
- (a) $n = 3, \langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3,$
- (b) $n = 4, \langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$

11. Wiadomo, że $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Sprawdzić, czy \mathcal{B}' jest bazą ortogonalną, ortonormalną w tej przestrzeni, jeśli:

- (a) $\mathcal{B}' = \left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}v_3, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3, \right.$
 $\left. u_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}v_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}v_3 \right\},$
- (b) $\mathcal{B}' = \{u_1 = v_1 - v_2 + 3v_3, u_2 = 10v_1 + v_2 - 3v_3, u_3 = 6v_2 + 2v_3\}.$

12. Zastosować ortogonalizację Grama-Schmidta i skonstruować bazę ortogonalną przestrzeni \mathbb{R}^3 startując z podanej bazy \mathcal{B} :

- (a) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 0, -1)\},$
- (b) $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (-1, 0, -1), (1, 1, 1)\}.$

13. Skonstruować bazę ortogonalną w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, jeśli

- (a) $V = \text{Lin} \{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, -1), (1, 2, 0, -2)\},$
- (b) $V = \text{Lin} \{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, -1), (1, 2, 0, -2), (0, -3, -1, 1)\},$

a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w indukowanym na podprzestrzeni liniowej V przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^4 wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny.

14. Podać bazę ortonormalną przestrzeni $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, w której iloczyn skalarny jest indukowany z przestrzeni \mathbb{R}^4 :

- (a) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x + y + z + t = 0\},$
- (b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x - 2y + z - 3t = 0\},$
- (c) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x + y + z + t = 0 \wedge x - 2y + z - 3t = 0\}.$

15. Wyznaczyć dopełnienie ortogonalne V^\perp podprzestrzeni liniowej V w przestrzeni \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalarnym, jeśli

- (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 2x - y - z = 0\},$
- (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 2x - y - z = 0 \wedge 3x + 2y - 5z = 0\},$
- (c) $V = \text{Lin}\{(-1, 2, 3)\},$
- (d) $V = \text{Lin}\{(-1, 2, -1), (1, 2, 1)\}.$

16. Wyznaczyć dopełnienie ortogonalne V^\perp podprzestrzeni liniowej V w przestrzeni \mathbb{R}^4 ze standardowym iloczynem skalarnym, jeśli

- (a) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x - y - z - t = 0\}$,
- (b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x - y - z - t = 0 \wedge x + y - z + t = 0\}$,
- (c) $V = \text{Lin}\{(1, 1, 0, 0)\}$,
- (d) $V = \text{Lin}\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, -1)\}$,
- (e) $V = \text{Lin}\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\}$,
- (f) $V = \text{Lin}\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2), (1, 1, 0, 0)\}$.

17. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora v na wektor u w podanej przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^n wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny

- (a) $v = (3, 4)$, $u = (1, 1)$, \mathbb{R}^2 ,
- (b) $v = (1, 1, 1)$, $u = (1, -1, 1)$, \mathbb{R}^3 ,
- (c) $v = (1, 1, 2, 2)$, $u = (2, 2, 1, 1)$, \mathbb{R}^4 .

18. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora v na podprzestrzeń liniową V przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^n wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny, jeśli

- (a) $v = (3, 4)$, $V = \text{Lin}\{(1, 1)\}$, \mathbb{R}^2 ,
- (b) $v = (1, 1, -1)$, $V = \text{Lin}\{(2, -1, 0)\}$, \mathbb{R}^3 ,
- (c) $v = (1, 1, -1)$, $V = \text{Lin}\{(2, -1, 0), (0, -1, 2)\}$, \mathbb{R}^3 ,
- (d) $v = (1, 2, 3, 4)$, $V = \text{Lin}\{(1, 0, 1, 1), (0, 0, -1, 1)\}$, \mathbb{R}^4 ,
- (d) $v = (1, 2, 2, 0, -2)$, $V = \text{Lin}\{(1, 1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 0)\}$, \mathbb{R}^5

FORMY KWADRATOWE

19. Napisać macierz podanej formy kwadratowej f . Jak wygląda symetryczna forma dwuliniowa F odpowiadająca formie kwadratowej f ?

- (a) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$,
- (b) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
- (c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_2x_3$,
- (d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 3x_4^2$.

20. Sprowadzić do postaci kanonicznej formy kwadratowej z zadania poprzedniego.

Odp. Np. (a) $-x_1'^2 + \frac{5}{4}x_2'^2$, $x_1' = x_1 + \frac{1}{2}x_2$, $x_2' = x_2$,

(b) $2x_1'^2 - \frac{11}{2}x_2'^2 + \frac{74}{11}x_3'^2$, $x_1' = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $x_2' = x_2 - \frac{7}{11}x_3$, $x_3' = x_3$,

(c) $x_1'^2 - x_2'^2$, $x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)$, $x_2' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3)$,

(d) $-\frac{1}{3}x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2 + 3x_4'^2$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 + x_3$, $x_3' = x_2 - x_3$, $x_4' = \frac{1}{3}x_1 + x_4$.

21. Napisać macierz symetrycznej formy dwuliniowej F . Jak wygląda forma kwadratowa f odpowiadająca formie dwuliniowej F ?

- (a) $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_2$,
- (b) $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$,
- (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = -6x_1y_4 - 6x_4y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$.

22. Dla jakiej wartości parametru λ forma kwadratowa f jest dodatnio określona?

- (a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 9x_2^2$,
- (b) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,
- (c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
- (d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_4$.

Odp.: (a) $-3 < \lambda < 3$, (b) $\lambda > 2$, (c) $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$, (d) $-\sqrt{\frac{5}{3}} < \lambda < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

23. Dla jakiej wartości parametru λ forma kwadratowa f jest ujemnie określona?

- (a) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + \lambda x_2^2 + 4x_1x_2$,
- (b) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$,
- (c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2\lambda(x_1x_3 + x_2x_4)$.

Odp.: (a) $\lambda < -4$, (b) $\lambda < -10$, (c) $-1 < \lambda < 1$.

ARYTMETYKA

24. Korzystając z algorytmu Euklidesa, znaleźć największy wspólny dzielnik liczb $a, b \in \mathbb{Z}$, a następnie zapisać go w postaci

$$NWD(a, b) = a \cdot x + b \cdot y, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Polecenie wykonać dla

- (a) $a = 379, \quad b = 77;$
- (b) $a = 975, \quad b = 442;$
- (c) $a = 2849, \quad b = 1258;$
- (d) $a = 34307, \quad b = 34216;$
- (e) $a = 22869, \quad b = 11025.$

Odp.: (a) 1, $x = -13, y = 64$; (b) 13, $x = 5, y = -11$; (c) 37, $x = -15, y = 34$; (d) 91, $x = 1, y = -1$; (e) 63, $x = 27, y = -56$.

25. Sprawdzić, która para liczb a, b to liczby względnie pierwsze, jeśli

- (a) $a = 1273, \quad b = 858;$
- (b) $a = 1037, \quad b = 793;$
- (c) $a = 273, \quad b = 231;$
- (d) $a = 27333, \quad b = 23134.$

Odp.: Względnie pierwsze są pary liczb w (a) i (d).

26. Obliczyć resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b , jeśli

- (a) $a = 1946, \quad b = 26;$
- (b) $a = 1946^{1972}, \quad b = 26;$
- (c) $a = 1972, \quad b = 26;$
- (d) $a = 1972^{1946}, \quad b = 26;$
- (e) $a = 1946^{1972} + 1972^{1946}, \quad b = 26.$

Odp.: (a) 22; (b) 22; (c) 22; (d) 16; (e) 12.

27. Obliczyć resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b , jeśli

- (a) $a = 5555, \quad b = 191;$
- (b) $a = 5555^{190}, \quad b = 191;$
- (c) $a = 5555^{7777}, \quad b = 191;$
- (d) $a = 7777^{5555}, \quad b = 191;$
- (e) $a = 5555^{7777} + 7777^{5555}, \quad b = 191.$

Odp.: (a) 16; (b) 1; (c) 40; (d) 185; (e) 34.

28. Obliczyć resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b , jeśli

- (a) $a = 295500^{18}$, $b = 19$;
- (b) $a = 295500^{18n}$, $b = 19$, $n \in \mathbb{N}$;
- (c) $a = 295500^{19}$, $b = 19$;
- (d) $a = 295500^{18n+1}$, $b = 19$, $n \in \mathbb{N}$;
- (e) $a = 295500^{18n+13}$, $b = 19$, $n \in \mathbb{N}$.

Odp.: (a) 1; (b) 1; (c) 12; (d) 12; (e) 12.

29. Wyznaczyć ostatnie dwie cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczb 9^9 , 9^{10} , 9^{99} , 7^9 , 7^{99} , 7^{999} .

Odp.: 89, 1, 89, 7, 7, 7.

30. Korzystając z własności kongruencji (m.in. małego twierdzenia Fermata) sprawdzić, że dla każdej liczby naturalnej n

- (a) $31 \mid 2^{5n} - 1$,
- (b) $13 \mid 1 + 3^{3n+1} + 9^{3n+1}$,
- (c) $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$.

31. Sprawdzić, czy para $(G, *)$ jest grupą, jeśli

- (a) $G = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| \leq 1\}$, $x * y = xy$ (mnożenie liczb x, y), gdy $x, y \in G$;
- (b) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$,
 $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1 + x_1y_2)$, gdy $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$;
- (c) $G = \mathbb{R}$, $a * b = a + b - ab$, gdy $a, b \in G$;
- (d) $G = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 1\}$, $a * b = a + b - ab$, gdy $a, b \in G$.

Odp.: (a) nie; (b) tak; (c) nie; (d) tak.

32. Sprawdzić, czy w Zadaniu 32 (b) i (d) grupy są abelowe.

33. W grupie $(G, *)$ z Zadania 32 (b) definiujemy dwa podzbiory

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}, \\ H_2 &= \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pokazać, że H_1 i H_2 są podgrupami w tej grupie.

34. Rozważmy zbiór $K = \mathbb{R}^2$ z dwoma działaniami \oplus i \odot

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ (x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) &= (x_1y_1, x_2y_2), \end{aligned}$$

gdy $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in K$. Sprawdzić, czy (K, \oplus, \odot) jest (a) pierścieniem; (b) ciałem.

35. Wykazać, że zbiór

$$K = \{c \in \mathbb{R} : c = a + b\sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Q}\}$$

z dodawaniem i mnożeniem liczb (rzeczywistych) tworzy ciało. Wyznaczyć elementy odwrotne do liczb (a) $c = 1 + \sqrt{2}$, (b) $c = 1 - \sqrt{2}$, (c) $c = -2 - 3\sqrt{2}$.

Odp. (a) $c^{-1} = -1 + \sqrt{2}$.

36. Niech

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sprawdzić, że trójka $(K, +, \cdot)$ jest ciałem, jeśli $+$ i \cdot oznaczają zwykłe dodawanie i mnożenie macierzy.

37. Wyznaczyć podane elementy (liczby) w podanym ciele liczbowym

- (a) $-1, -2, -5, -9$ w ciele \mathbb{Z}_{13} ;
- (b) $2^{-1}, 2^{-2}, 7^{-1}, 7^{-5}$ w ciele \mathbb{Z}_{13} ;
- (c) $-1, -10, -15, -88$ w ciele \mathbb{Z}_{89} ;
- (d) $10^{-1}, 10^{-2}, 15^{-1}, 15^{-5}$ w ciele \mathbb{Z}_{89} ;
- (e) $7^{-1}, 7^{-2}, 7^{-8}$ w ciele \mathbb{Z}_{89} ;
- (f) $20^{-1}, 21^{-1}$ w ciele \mathbb{Z}_{23} ;
- (g) $100^{-1}, 499^{-1}$ w ciele \mathbb{Z}_{5503} .

W przypadkach trudnych skorzystać m.in. z małego twierdzenia Fermata. Porównać też zadanie następne.

Odp.: (a) $-5 \equiv 8 \pmod{13}$; (b) $2^{-2} \equiv -3 \equiv 10 \pmod{13}$; (d) $10^{-2} \equiv -8 \equiv 5 \pmod{13}$; (e) $7^{-1} \equiv -38 \equiv 51 \pmod{58}$,
 $7^{-2} \equiv (7^{-1})^2 \equiv 51^2 \equiv 20 \pmod{58}$, $7^{-8} \equiv 20^4 \equiv -22 \equiv 67 \pmod{58}$; (g) $100^{-1} \equiv 1816 \pmod{1817}$, $499^{-1} \equiv -1180 \equiv 4323 \pmod{4990}$.

38. Do wyznaczania elementu odwrotnego a^{-1} w ciele \mathbb{Z}_n można wykorzystywać algorytm Euklidesa. Istotnie, jeśli $a \in \mathbb{Z}_n$ i n jest liczbą pierwszą, to $NWD(a, n) = 1$. Korzystając z (rozszerzonego) algorytmu Euklidesa znajdujemy $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$a \cdot x + n \cdot y = 1 = NWD(a, n).$$

Wówczas mamy $a \cdot x \equiv 1 \pmod{n}$. Zatem x to szukane a^{-1} . Zrobić zadanie poprzednie korzystając z tej procedury.

ZADANIA DODATKOWE

39. Rozwiązać równania diofantyczne

- (a) $2x + 3y = 1$;
- (b) $696x - 16y = 88$;
- (c) $999x - 49y = 5000$;
- (d) $903x + 731y = 2107$.

Odp.: (a) $x = -1 + 3p$, $y = 1 - 2p$; (b) $x = 11 - 2p$, $y = 473 - 87p$; (c) $x = -90000 - 49p$,
 $y = -1835000 - 999p$; (d) $x = -196 + 17p$, $y = 245 - 21p$, $p \in \mathbb{Z}$.

40. Rozwiązać układy równań diofantycznych

- (a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 4y = -1; \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 2y = 1; \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} 253x - 207y = 69, \\ 207x + 253y = 3013. \end{cases}$

Odp.: (a) $x = -7$, $y = 5$; (b) nie ma rozwiązań; (c) $x = 6$, $y = 7$.

41. W ciele \mathbb{Z}_{113} znaleźć rozwiązania równań

- (a) $2x = 77$;
- (b) $77x = 2$;
- (c) $10x = 112$.

Odp.: (a) $x = 95$; (b) $x = 69$; (c) $x = 79$.

42. Pokazać, że $17 \mid (2x + 3y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $17 \mid (9x + 5y)$.